範疇性は数学理論の virtue になり得るか？

井上朋彦（Tomohiko Inoue）

名古屋文理大学

「範疇性（categoricity）」とはモデル理論の概念である。ある数学理論の任意の二つのモデルが互いに同型であるとき、その理論は範疇的（categorical）であるという。これは、直観的に言うならば、ある理論の数学的解釈が（同型を除いて）必ず一意に定まることを言っている。一方で、近年数学の哲学では、数学の virtue theory が注目を集めている（cf. [Aberdein & Rittberg & Tanswell 2021]）。そこでは、良い証明、公理を検討する上で求められる認識論的な条件、つまり数学における virtue がどのようなものであるかが論じられている。数学における virtue と範疇性の関わりについて、Detlefsen は次のような疑問を挙げた。「理論は範疇的になるほど良くなるのか、あるいは意義深い同型でない解釈を生み出すほど良くなるのか、どちらがもっともらしいのか。この疑問に一つの答えはあるのか。あるいはむしろ、範疇性はある理論では virtue になり得るが、他の理論ではそうではないということなのか。」（[Baldwin 2015, p. 15]）ここで Detlefsen は、一部の数学理論では範疇性が良い理論の条件になる可能性を示唆している。たしかに、1 階論理のような制限された論理学では無限モデルは必ず範疇的ならないことがわかっているが、より通常の数学に近いとされる高階論理ではそうとは限らない。このとき範疇的な理論の場合に限れば、範疇性を良い理論の条件として挙げることができるのではないか。本研究は、範疇性概念黎明期の数概念の基礎づけを例にとり、範疇性が数学理論の virtue になり得るかを論じる。

そもそも本研究で扱う「理論」とは、実数論や幾何学といった数学の一分野を展開するために必要な命題のあつまりのことを指す（ここにはもちろん公理も含まれる）。理論には範疇的なものがあるとは言うものの、通常の数学で研究対象となる理論は必ずしも範疇的ではない。むしろ、範疇的な理論というよりも範疇的でない理論を扱う場合がほとんどである。群、環、体のような抽象代数構造はその最たる例と言える。しかし、同じく代数体に関する公理でも、体の公理は範疇的でないが、実数体の公理は範疇的である。このような範疇的な理論とそうでない理論との違いはどこにあるのか。[Feferman 1999] は、数学ないし数理論理学における公理を次のような二つの種類に分ける（[Feferman 1999, pp. 2-3]）。一つは「構造的（structural）」公理であり、これは抽象代数構造や位相構造のような数学的構造を定義するために導入される公理である。そしてもう一つは「基礎的（foundational）」公理であり、これは数、集合、関数のような、数学全体の根底にある基礎的な概念に関する公理である。上の例をこの分類に当てはめると、体の公理は構造的、実数体の公理は基礎的ということになる。ゆえに、このことを踏まえると、Feferman の分類は理論が範疇的か否かを分ける線引きとしても有効である、という仮説を立てることができる。すなわち、全般的な傾向として構造的な理論は範疇的ではなく、基礎的な理論は範疇的であるというように数学理論を分けるこ

とができるのである。

範疇性は、アメリカの数学者 Veblen が 1904 年に発表した博士論文『幾何学の体系（*A system of axioms for geometry*）』で初めて数学的に定式化された。しかし、範疇性に相当する概念は既に 19 世紀終盤の数概念の基礎づけで現れていた。画期をなす研究は Dedekind が 1888 年に発表した『数とは何か　そして何であるべきか（*Was sind und was sollen die Zahlen?*）』である。彼はこの著作で自然数の基礎づけに取り組んだ。すなわち、自然数に相当する「一重無限システム」をつくり、それらの間の同型写像を構成することで自然数（の公理）が範疇的であることを示した。この成果に続いて、Cantor は1895年の論文「超限集合論の基礎に対する寄与（Beiträge zum Begründung der transfiniten Mengelehre (1)）」で任意の稠密全順序集合が互いに同型であることを示した。また、Hilbert は 1900 年の論文「数概念について（Über den Zahlbegriff）」で実数体の公理を示しており、ここに含まれる「完全性の公理」には今日の範疇性に相当する概念が念頭に置かれているという見方もある（cf. [Moriconi 2003]）。これらの研究は範疇性が定式化されるより前のものであるため、その証明や定式化に現代的な範疇性概念が見込まれていたと断言することはできない。しかし、いずれの研究も、目的の集合が一意に定まることを示すことにより数概念を基礎づけていたため、範疇性に無自覚であった時代からそれに相当する概念は数概念の基礎づけの本質的な部分を占めていたことがわかる。

以上より、本研究の結論をまとめると次のようになる。数学理論が基礎的であり、とりわけ数概念の基礎づけの場合に限れば、範疇性は数学理論の virtue として有効である。

【参考文献】

Aberdein, A. and Rittberg, C. J. and Tanswell, F. S. ‘Virtue theory of mathematical practice: an introduction’, *Synthese* 199: 10167-10180.

Baldwin, J. T. (2016). *Model Theory and the Philosophy of Mathematical Practice*. Cambridge University Press.

Feferman, S. (1999) ‘Does mathematics need new axioms?’, *The American Mathematical Monthly* 106: 99-111.

Moriconi, E. (2003) ‘On the meaning of Hilbert’s consistency problem (PARIS, 1900)’, *Synthese* 137: 129-139.